Soluție

1. a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

b) Cum sistemul este compatibil determinat rezultă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$. Deoarece $(0;0;1)$ este soluție pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rezultă că $(0;0;1)$ este soluția unică a sistemului.

c) Sistemul este compatibil nedeterminat şi are soluția $(\alpha;\alpha;1+\alpha)$.

2. a) Pentru $a = 19 \in \mathbb{Q}$, $b = 6 \in \mathbb{Q}$, avem $a^2 - 10b^2 = 1$, deci $A = \begin{pmatrix} 19 & 10\cdot 6 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

b) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ şi $Y = \begin{pmatrix} a' & 10b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in G$, avem $XY = \begin{pmatrix} a'' & 10b'' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$, unde $a'' = a\cdot a' + 10b\cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $b'' = b\cdot a' + a\cdot b' \in \mathbb{Q}$ şi $\det(XY) = \det(X)\det(Y) = 1$.

c) Se arată inductiv că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 10\cdot b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \in G$.

Cum $b_n > 0$, rezultă că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$ şi apoi că puterile matricei A sunt o infinitate de elemente distincte ale grupului $(G,\cdot)$.